DM de mathématiques n°8

Tirages en cascade

à rendre pour le mardi 9 juin

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de n urnes notées $U_1, \cdots, U_n$ et on suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_i contient i boules numérotées de 1 à i. On s'intéresse au jeu suivant.

- Au premier tirage, on tire *avec remise* une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r, alors le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier k non nul, au k-ième tirage on tire *avec remise* une boule d'une certaine urne, et si la boule tirée a le numéro s, on effectue le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k^{e} tirage. **On convient que $Z_0 = n$.**

1) Déterminer la loi de Z_1 et calculer $\mathbb{E}(Z_1)$.

2) En déduire que, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(Z_2 = r) = \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{i}$$

3) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(Z_2 = r) = 1$.

4) Calculer l'espérance de Z_2 grâce à une interversion de sommes.

5) **a)** Par la formule des probabilités composées, calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_1 = n, \cdots, Z_k = n)$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Z_k = i) > 0$.

6) À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall r \in [\![1, n]\!] \quad \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i}$$

7) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{1 + \mathbb{E}(Z_k)}{2}$$

8) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(Z_k)$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(Z_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$?